# Дифференциальные уравнения второго порядка и высших порядков.

Наиболее популярны **дифференциальные уравнения второго порядка**. В дифференциальное уравнение второго порядка **обязательно** входит вторая производная $y''$ и **не входят** производные более высоких порядков:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Следует отметить, что некоторые из малышей $x, y, y'$ (и даже все сразу) могут отсутствовать в уравнении, важно, чтобы дома был отец $y''$. Самое примитивное дифференциальное уравнение второго порядка выглядит так: $y'' = 0$

В дифференциальное уравнение третьего порядка **обязательно** входит третья производная $y'''$ и **не входят** производные более высоких порядков:
$F(x, y, y', y'', y''') = 0$

Самое простое дифференциальное уравнение третьего порядка выглядит так: $y''' = 0$

## Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В теории  и практике различают два типа таких уравнений – **однородное уравнение** и **неоднородное уравнение**.

**Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами** имеет следующий вид:

$y'' + py' + qy = 0$, где $p$ и $q$ – константы (числа), а в правой части – **строго** ноль.

**Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами** имеет вид:

$y'' + py' + qy = f(x)$, где $p$ и $q$ – константы, а $f(x)$ – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае функция $f(x)$ может быть числом, *отличным от нуля*.

Какая мысль приходит в голову после беглого взгляда? Неоднородное уравнение кажется сложнее. На этот раз первое впечатление не подводит!

Кроме того, чтобы научиться решать неоднородные уравнения **необходимо** уметь решать однородные уравнения. По этой причине сначала рассмотрим алгоритм решения линейного однородного уравнения второго порядка:

$$y'' + py' + qy = 0$$

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое *характеристическое уравнение*:

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно:

вместо второй производной записываем $\lambda^2$;
вместо первой производной записываем просто «лямбду»;
вместо функции $y$ ничего не записываем.

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – это **обычное квадратное уравнение**, которое предстоит решить.

Существуют три варианта развития событий. Они доказаны в курсе математического анализа, и на практике мы будем использовать готовые формулы.

**Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня**Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два **различных** действительных корня $\lambda_1$, $\lambda_2$ (т.е., если дискриминант $D > 0$), то общее решение однородного уравнения выглядит так:
$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где $C_1, C_2$ – константы.

В случае если один из корней равен нулю, решение очевидным образом упрощается; пусть, например, $\lambda_1 = 0$, тогда общее решение: $y = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

**Решение:** составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$
$D = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$

$\lambda_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$, $\lambda_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

Получены два различных действительных корня (от греха подальше лучше сразу же выполнить проверку, подставив корни в уравнение).
Всё, что осталось сделать – записать ответ, руководствуясь формулой $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

**Ответ:** общее решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Пример 2

Найти общее решение дифференциального уравнения, выполнить проверку
$y'' - 4y' = 0$