

Контрольная работа по теме Комплексные числа

Теория

Мнимой единицей называется число i , обладающее свойством $i^2 = -1$.

Числа вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, называют *комплексными*. Число a называют *действительной частью* комплексного числа, bi – *мнимой частью* комплексного числа, b – *коэффициентом при мнимой части*.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Два комплексных числа называют *сопряженными*, если они отличаются друг от друга только знаком перед мнимой частью. Сопряженные комплексные числа обозначают: z и \bar{z} . Например, $z_1 = 1 + 2i$ и $\bar{z}_1 = 1 - 2i$;

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Пусть даны комплексные числа: $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$.

Сложение $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

Вычитание $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

Умножение $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Возведение в степень производят по правилу возведения двучлена в соответствующую степень.

При делении двух комплексных чисел в алгебраической форме, необходимо умножить делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Модуль комплексного числа $a + bi$ обозначается $|a + bi|$ или буквой r и равен:

$$r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Пример 2.

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = (2 + 5) + (3 - 7)i = 7 - 4i ;$$

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = (2 - 5) + (3 - (-7))i = -3 + 10i ;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i + 21 = 31 + i$$

;

$$(2 + 3i)^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i ;$$

$$(3 + 5i)^3 = 125 + 3 \cdot 25 \cdot 3i + 3 \cdot 5 \cdot 9i^2 + 27i^3 , \quad \text{так как}$$

$$i^2 = -1 , \quad i^3 = -i , \quad \text{то}$$

получим $(3 + 5i)^3 = 125 + 225i - 135 - 27i = -10 + 198i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{5 - 7i} = \frac{(2 + 3i) \cdot (5 + 7i)}{(5 - 7i) \cdot (5 + 7i)} = \frac{10 + 14i + 15i + 21i^2}{5^2 - (7i)^2} = \frac{10 + 29i - 21}{25 - 49i^2} = \frac{-11 + 29i}{25 + 49} = \frac{-11 + 29i}{74} =$$

$$-\frac{11}{74} + \frac{29}{74}i$$

Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, для которого дискриминант отрицателен, в множестве \mathbf{R} действительных чисел не имеет решения, так как корень из отрицательного числа в этом множестве не имеет действительного значения. Рассмотрим решение этого уравнения в множестве \mathbf{C} комплексных чисел.

Пример 3.

Решим квадратное уравнение: $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Найдем дискриминант по формуле: $D = b^2 - 4ac$. Учитывая, что $a = 1$, $b = -6$, $c = 13$, получим:

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16 = 16i^2$$

Тогда

$\sqrt{D} = \sqrt{16i^2} = 4i$. Корни уравнения находим по формулам^

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

$$x_1 = \frac{6 - 4i}{2} = \frac{2(3 - 2i)}{2} = 3 - 2i;$$

$$x_2 = \frac{6 + 4i}{2} = \frac{2(3 + 2i)}{2} = 3 + 2i$$

Ответ: $x_1 = 3 - 2i$, $x_2 = 3 + 2i$.

Контрольные вопросы:

1. Какое число называют мнимой единицей?
2. Какие числа называются комплексными, из каких частей они состоят?
3. Какая форма записи комплексных чисел называется алгебраической?
4. Как изображаются комплексные числа на плоскости (рисунок)?
5. Какие комплексные числа называются сопряженными?
6. Перечислите все арифметические действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

2) Выполните индивидуальные практические задания:

Критерии оценивания

Ответы на контрольные вопросы

2 балла

Решите квадратные уравнения:

3 балла

$$x^2 - 2x + 8 = 0;$$

$$x^2 + 6x + 69 = 0;$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0;$$

Для данных комплексных чисел найдите:

$$Z_1 + Z_2, Z_1 - Z_2, Z_1 \cdot Z_2, \frac{Z_1}{Z_2}$$

4 балла

$$z_1 = 5 - i, z_2 = 2 + 2i$$

Сложение – 0,5 б.

Вычитание – 0,5б

Умножение – 1,5б.

Деление – 1,5б.

Выполните действия:

4 балла

$$\frac{8 + 2i}{5 - 3i} \text{ - 1 б.}$$

$$\frac{5 + 2i}{2 - 5i} - \frac{3 - 4i}{4 + 3i} \text{ - 3 б.}$$

Возведите комплексное число во 2-ю и в 3-ю степень

1 балл

$$z = 6 - 5i$$

Найдите модуль комплексного числа

1 балл

$$z = -5 + i$$

Максимальное количество баллов – 15.

Критерии оценивания: оценка «5» - 15-14 баллов,

оценка «4» - 13,5-10,5 баллов,

оценка «3» - 10-6,5 баллов,

оценка «2» - 6 баллов и менее.