

Здравствуйте!

Алгоритм действия такой:

1. Ознакомьтесь с содержанием лекции.
2. Сделайте краткий конспект.

## Разложение элементарных функций в ряды Тейлора и

### Маклорена

Покажем, что если произвольная функция  $f(x)$  задана на множестве  $X$ , в окрестности точки  $x = a$  имеет множество производных и является суммой степенного ряда:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots,$$

то можно найти коэффициенты этого ряда.

Подставим в степенной ряд  $x = a$ . Тогда  $a_0 = f(a)$ .

Найдем первую производную функции  $f(x)$ :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + na_n(x-a)^{n-1} + \dots$$

При  $x = a$ :  $a_1 = f'(a)$ .

Для второй производной получим:

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + \dots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \dots$$

При  $x = a$ :  $a_2 = \frac{f''(a)}{2!}$ .

Продолжая эту процедуру  $n$  раз получим:

$$a_n = \frac{f^n(a)}{n!}.$$

Таким образом, получили степенной ряд вида:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \dots,$$

который называется *рядом Тейлора* для функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x = a$ .

Частным случаем ряда Тейлора является *ряд Маклорена* при  $a = 0$ :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + K$$

Остаток ряда Тейлора (Маклорена) получается отбрасыванием от основных рядов  $n$  первых членов и обозначается как  $R_n(x)$ . Тогда функцию  $f(x)$  можно записать как сумму  $n$  первых членов ряда  $S_n(x)$  и остатка  $R_n(x)$ :  $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ ,

то есть

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Остаток обычно  $R_n(x)$  выражают разными формулами.

Одна из них в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \text{ где } c = a + \theta(x-a), \theta < 0 < 1.$$

Заметим, что на практике чаще используется ряд Маклорена. Таким образом, для того, чтобы записать функцию  $f(x)$  в виде суммы степенного ряда необходимо:

- 1) найти коэффициенты ряда Маклорена (Тейлора);
- 2) найти область сходимости полученного степенного ряда;
- 3) доказать, что данный ряд сходится к функции  $f(x)$ .

**Теорема 1** (необходимое и достаточное условие сходимости ряда Маклорена). Пусть радиус сходимости ряда  $R > 0$ . Для того, чтобы этот ряд сходил к функции  $f(x)$  в интервале  $(-R, R)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  в указанном интервале.

**Теорема 2.** Если производные любого порядка функции  $f(x)$  в некотором промежутке  $[-b, b]$  ограничены по абсолютной величине одним и тем же числом  $M$ , то

есть  $\left| f^{(n)}(x) \right| < M$ , то в этом промежутке функцию  $f(x)$  можно разложить в ряд Маклорена.

**Пример 1.** Разложить в ряд Тейлора в окрестности

точки  $x = -4$  функцию  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ .

*Решение.*

Находим значение функции и ее производных при  $x = -4$ .

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2, \quad f(-4) = -64 - 32 + 20 - 2 = -78;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5, \quad f'(-4) = 48 + 16 - 5 = 59;$$

$$f''(x) = 6x - 4, \quad f''(-4) = -28;$$

$$f'''(x) = 6, \quad f'''(-4) = 6;$$

$$f^{(4)}(x) = 0, \quad f^{(4)}(-4) = 0$$

.....

$$f^{(n)}(x) = 0, \quad f^{(n)}(-4) = 0;$$

Подставляем эти значения в ряд. Получаем:

$$x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = -78 + \frac{59}{1!}(x+4) - \frac{28}{2!}(x+4)^2 + \frac{6}{3!}(x+4)^3,$$

или

$$x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = -78 + 59(x+4) - 14(x+4)^2 + (x+4)^3.$$

Область сходимости  $-\infty < x < \infty$ .

**Пример 2.** Разложить функцию  $e^x$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 2$ .

*Решение:*

Находим значение функции и ее производных при  $x = 2$ .

$$f(x) = e^x, \quad f(2) = e^2;$$

$$f'(x) = e^x, \quad f'(2) = e^2;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(2) = e^2.$$

Подставляем эти значения в ряд. Получаем:

$$e^x = e^2 + \frac{e^2}{1!}(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n + \dots,$$

$$e^x = e^2 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} \right)$$

или

Найдем область сходимости этого ряда. По признаку Даламбера ряд сходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot (x-2)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)}{n+1} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Следовательно, при любом  $x$  этот предел менее 1, а потому область сходимости ряда будет:  $-\infty < x < \infty$ .

Рассмотрим несколько примеров разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций. Напомним, что ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

сходится на интервале  $(-R, R)$  к функции  $f(x)$ .

Отметим, что для разложения функции в ряд необходимо:

а) найти коэффициенты ряда Маклорена для данной функции;

б) вычислить радиус сходимости для полученного ряда;

в) доказать, что полученный ряд сходится к функции  $y = f(x)$ .

**Пример 3.** Рассмотрим функцию  $f(x) = e^x$ .

*Решение.*

Вычислим значение функции и ее производных при  $x = 0$ .

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x.$$

Тогда числовые коэффициенты ряда имеют вид:

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1$$

для любого  $n$ . Подставим найденные коэффициенты в ряд Маклорена и

получим:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Найдем радиус сходимости полученного ряда, а именно:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Следовательно, ряд сходится на интервале  $(-\infty, +\infty)$ .

Этот ряд сходится к функции  $e^x$  при любых значениях  $x$ , потому что на любом промежутке  $[-b, b]$  функция  $e^x$  и ее производные по абсолютной величине ограничены числом  $e^b$ .

**Пример 4.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \sin x$ .

*Решение.*

Найдем значение функции и ее производных при  $x = 0$ :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0; \\
f'(x) &= \cos x; & f'(0) &= 1; \\
f''(x) &= -\sin x; & f''(0) &= 0; \\
f'''(x) &= -\cos x; & f'''(0) &= -1; \\
f^{iv}(x) &= \sin x; & f^{iv}(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что производные четного порядка  $f^{(2n)}(0) = 0$ , а производные нечетного порядка  $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Подставим найденные коэффициенты в ряд Маклорена и получим разложение:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Найдем интервал сходимости данного ряда. По признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}(2n-1)!}{(2n+1)!x^{2n-1}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0 < 1$$

для любого  $x$ . Следовательно, ряд сходится на интервале  $(-\infty, +\infty)$ .

Этот ряд сходится к функции  $\sin x$ , потому что все ее производные ограничены единицей.

**Пример 5.**  $f(x) = \cos x$ .

*Решение.*

Найдем значение функции и ее производных при  $x = 0$ :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1; \\
f'(x) &= -\sin x; & f'(0) &= 0; \\
f''(x) &= -\cos x; & f''(0) &= -1; \\
f'''(x) &= \sin x; & f'''(0) &= 0; \\
f^{iv}(x) &= \cos x; & f^{iv}(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$$

следовательно:

Аналогично с предыдущим рядом область сходимости  $(-\infty, +\infty)$ . Ряд сходится к функции  $\cos x$ , потому что все ее производные ограничены единицей.

Обратим внимание, что функция  $\sin x$  нечетная и разложение в ряд по нечетным степеням, функция  $\cos x$  – четная и разложение в ряд по четным степеням.

**Пример 6.** Биномиальный ряд:  $f(x) = (1+x)^m$ .

*Решение.*

Найдем значение функции и ее производных при  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^m; & f(0) &= 1; \\ f'(x) &= m(1+x)^{m-1}; & f'(0) &= m; \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}; & f''(0) &= m(m-1); \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}; & f'''(0) &= m(m-1)(m-2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))(1+x)^{m-n}, \\ f^{(n)}(0) &= m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1)). \end{aligned}$$

Подставим эти значения коэффициентов в ряд Маклорена и получим разложение данной функции в степенной ряд:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots m(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Найдем радиус сходимости этого ряда:

$$|a_n| = \left| \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} \right|; \quad |a_{n+1}| = \left| \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)(m-n)}{(n+1)!} \right|;$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! m(m-1) \dots (m-n+1)(m-n)}{n! m(m-1) \dots (m-n+1)(m-n)} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{m}{n} - 1} \right| = 1.$$

Следовательно, ряд сходится на интервале  $(-1, 1)$ . В предельных точках при  $x = -1$  и  $x = 1$  ряд может сходиться или нет в зависимости от показателя степени  $m$ .

Исследованный ряд сходится на интервале  $(-1, 1)$  к функции  $f(x) = (1+x)^m$ , то есть сумма ряда  $S(x) = (1+x)^m$  при  $|x| < 1$ .

**Пример 7.** Разложим в ряд Маклорена функцию  $f(x) = \ln(1+x)$ .

*Решение.*

Для разложения в ряд этой функции используем биномиальный ряд при  $m = -1$ .

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots$$

Получим:

На основе свойства степенных рядов (степенной ряд можно интегрировать в области его сходимости) найдем интеграл от левой и правой частей данного ряда:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

Найдем область сходимости данного ряда:

то есть областью сходимости данного ряда является интервал  $(-1, 1)$ . Определим сходимость ряда на концах интервала. При  $x = -1$  получим числовой ряд с общим

членом  $u_n = (-1)^{2n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ . Этот ряд является гармоническим рядом, то есть расходится.

При  $x = +1$  получим числовой ряд с общим членом  $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ .

Ряд по признаку Лейб  $(-1, +1]$  дится. Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток .

## 16.2. Применение степенных рядов степеней в приближенных вычислениях

В приближенных вычислениях степенные ряды играют исключительно большую роль. С их помощью составлены таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов, таблицы значений других функций, которые используют в разных областях знаний, например в теории вероятностей и математической статистике. Кроме того, разложение функций в степенной ряд полезно для их теоретического исследования. Главным вопросом при использовании степенных рядов в приближенных вычислениях является вопрос оценки погрешности при замене суммы ряда суммой его первых  $n$  членов.

Рассмотрим два случая:

1. функция разложена в знакочередующийся ряд;
2. функция разложена в знакостоянный ряд.

Вычисление с помощью знакочередующихся рядов

Пусть функция  $f(x)$  разложена в знакочередующийся степенной ряд. Тогда при вычислении этой функции для конкретного значения  $X$  получаем числовой ряд, к которому можно применить признак Лейбница. В соответствии с этим признаком, если сумму ряда заменить суммой его первых  $n$  членов, то абсолютная погрешность не превышает первого члена остатка этого ряда, то есть:  $|S - S_n| < u_{n+1}$ .

**Пример 8.** Вычислить  $\cos 5^\circ$  с точностью до 0,0001.

*Решение.*

Будем использовать ряд Маклорена для  $f(x) = \cos x$ , подставив значение угла в радианах:

$$\cos 5^\circ = \cos \frac{\pi}{36} = 1 - \left( \frac{\pi}{36} \right)^2 \frac{1}{2!} + \left( \frac{\pi}{36} \right)^4 \frac{1}{4!} - \dots$$

Если сравнить первый и второй члены ряда с заданной точностью,

то:  $u_1 = 1 > 0.0001$ ;  $u_2 = \left( \frac{\pi}{36} \right)^2 \frac{1}{2!} \approx 0,0038 > 0,0001$ .

Третий член разложения:

$$u_3 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \frac{1}{4!} < \frac{(0.1)^4}{4!} = \frac{1}{24 \cdot 10000} < \frac{1}{10 \cdot 10000} = 0,00001,$$

меньше заданной точности вычисления. Следовательно, для вычисления  $\cos 5^\circ$  достаточно оставить два члена ряда, то есть

$$\cos 5^\circ \approx 1 - \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \frac{1}{2!} = 1 - 0,0038 = 0,9962.$$

Таким образом  $\cos 5^\circ \approx 0,9962$ .

**Пример 9.** Вычислить  $\sqrt[3]{9}$  с точностью 0,001.

*Решение.*

Будем использовать формулу биномиального ряда. Для этого запишем  $\sqrt[3]{9}$  в

$$\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{\frac{9}{8}} = 2\sqrt[3]{1 + \frac{1}{8}} = 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{1/3}$$

виде:

$$m = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{1}{8},$$

В этом выражении

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9} &= 2 \left[ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \left( \frac{1}{8} \right)^2 \frac{1}{2!} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \left( \frac{1}{3} - 2 \right) \left( \frac{1}{8} \right)^3 \frac{1}{3!} + \mathbf{K} \right] = \\ &= 2 \left( 1 + \frac{1}{3 \cdot 8} - \frac{2}{3^2 \cdot 8^2 \cdot 2!} + \frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 8^3 \cdot 3!} - \mathbf{K} \right). \end{aligned}$$

Сравним каждый из членов ряда с точностью, которая задана. Видно,

$$u_4 = \frac{4 \cdot 5}{3^3 \cdot 8^3 \cdot 3!} < 0,001$$

что  $\sqrt[3]{9}$  достаточно оставить три члена ряда.

$$\sqrt[3]{9} \approx 2 \left( 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576} \right), \quad \text{или} \quad \sqrt[3]{9} \approx 2,080.$$

Вычисление с помощью знакоположительных рядов

**Пример 10.** Вычислить число  $e$  с точностью до 0,001.

Решение.

В ряд для функции  $f(x) = e^x$  подставим  $x = 1$ . Получим:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + K + \frac{1}{n!} + L$$

Оценим погрешность, которая возникает при замене суммы ряда суммой первых  $n$  членов. Запишем очевидное неравенство:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + K + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + L + \frac{1}{2^{n-1}} = 3,$$

то есть  $2 < e < 3$ . Используем формулу остаточного члена ряда в форме

Лагранжа: 
$$R_n = \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

По условию задачи нужно найти  $n$  такое, чтобы выполнялось

неравенство:  $R_n < 0,001$  или  $\frac{3}{(n+1)!} < 0,001$ .

Легко проверить, что при  $n = 6$ : 
$$R_6 = \frac{e^\theta}{7!} < \frac{3}{7!} = \frac{3}{5040} \approx 0,0006 < 0,001.$$

Следовательно, 
$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}.$$

Отсюда  $e \approx 2 + 0,5 + 0,1667 + 0,0417 + 0,0083 + 0,0014 = 2,7181.$

**Пример 11.** Вычислить  $\ln 2$  с точностью 0,0001.

Решение.

Заметим, что для вычисления логарифмов можно было бы применить ряд для функции  $f(x) = \ln(1+x)$ , но этот ряд очень медленно сходится и для достижения заданной точности нужно было бы взять 9999 членов! Поэтому для вычисления логарифмов, как правило, используется ряд для

функции 
$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + K \right),$$
 который сходится на интервале  $(-1,1)$ .

Вычислим  $\ln 2$  с помощью этого ряда. Пусть  $\frac{1+x}{1-x} = 2$ , тогда  $x = \frac{1}{3}$ .

Следовательно,

$$\ln 2 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + K \right),$$

или

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} + \frac{1}{7 \cdot 9^3} + \frac{1}{(2n+1) \cdot 9^n} + K \right).$$

Для того, чтобы вычислить  $\ln 2$  с заданной точностью, возьмем сумму первых четырех

членов:

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} + \frac{1}{7 \cdot 9^3} \right).$$

Остаток ряда  $R_4 = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{9 \cdot 9^4} + \frac{1}{11 \cdot 9^5} + \frac{1}{13 \cdot 9^6} + K \right)$  отбросим. Оценим погрешность.

Очевидно, что

$$R_4 < \frac{2}{3} \left( \frac{1}{9 \cdot 9^4} + \frac{1}{9 \cdot 9^5} + \frac{1}{9 \cdot 9^6} + K \right)$$

или

$$R_4 < \frac{2}{3 \cdot 9^5} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + K \right).$$

Отсюда

$$R_4 < \frac{1}{3 \cdot 9^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 9^5 \cdot 8} = \frac{1}{78732} < \frac{1}{10000} = 0,0001.$$

$$\ln 2 \approx 0,66667 + 0,02469 + 0,00165 + 0,00006 = 0,69307 \approx 0,6931.$$

Таким образом, в ряду, который был использован для вычисления, достаточно было взять только четыре первые слагаемые вместо 9999 в ряду для функции  $f(x) = \ln(1+x)$ .

#### Вопросы для самодиагностики

1. Что такое ряд Тейлора?
2. какой вид имел ряд Маклорена?
3. Сформулировать теорему о разложении функции в ряд Тейлора.
4. Записать разложение в ряд Маклорена основных функций.
5. Указать области сходимости рассмотренных рядов.
6. Как выполнить оценку погрешности в приближенных вычислениях с помощью степенных рядов?

