

Здравствуйте.

Рассмотреть пример построения полинома Жегалкина

Выполнить задания

Построение полинома Жегалкина.

Главная особенность этих многочленов состоит в том, что любую булеву функцию можно представить полиномом Жегалкина, причем единственным образом.

Чаще всего для построения полиномов Жегалкина студентам предлагаются два метода построения таких полиномов: метод неопределенных коэффициентов и метод эквивалентных преобразований. Расчеты с использованием данных методов часто оказываются громоздкими. По невнимательности допустить ошибку не составляет труда.

Под катом приведен один удобный алгоритм, для построения полиномов Жегалкина, который студенты воспринимают «на ура», т.к. требует только выполнение «механических действий» без применения каких-либо умственных усилий. Мне метод известен под названием «метод треугольника Паскаля».

Порядок проведения вычислений проще показать на примере. Далее я буду по шагам показывать, как должен выглядеть расчет на бумаге (или как его удобно проводить).

Метод треугольника Паскаля

Требуется построить полином Жегалкина для функции f . Для примера, в качестве функции f возьмем

функцию голосования .

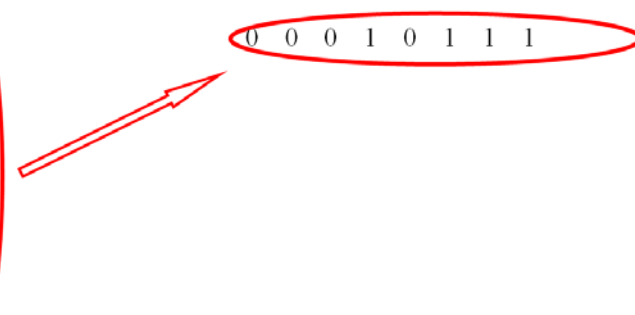
Шаг 1. Строим таблицу значений функции (строки в таблице идут в порядке возрастания двоичных кодов). Таблицу лучше разместить в левой части листа.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Шаг 2. Построение треугольника.

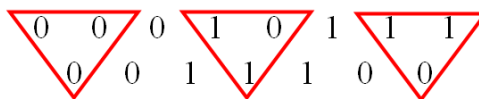
Для этого берем вектор значения функции и выписываем его напротив первой строки таблицы:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



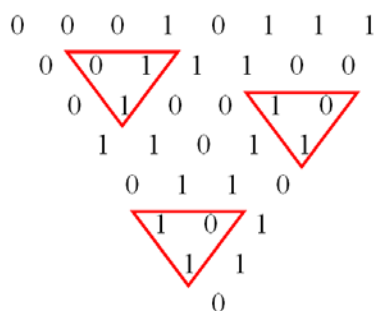
Далее заполняем треугольник, складывая попарно соседние значения по модулю 2, результат сложения выписываем ниже.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Продолжаем вычисления, пока в строке не останется лишь одна цифра.

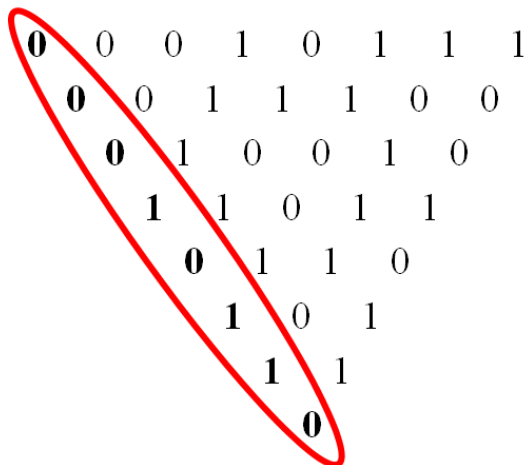
x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Шаг 3. Построение полинома Жегалкина.

Нас интересует левая сторона треугольника (значения выделены жирным):

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Числа на левой стороне (выделены жирным шрифтом) треугольника есть коэффициенты полинома при монотонных конъюнкциях, соответствующих наборам значений переменных.

Теперь выпишем для наглядности эти конъюнкции. Конъюнкции выписываем по двоичным наборам в левой части таблицы по следующему принципу: если напротив переменной x_i стоит 1, то переменная входит в конъюнкцию; в противном случае переменная отсутствует в конъюнкции. Набору (0,0,0) соответствует константа 1.

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\
0 & 1 & 1 & 0 & & & & \\
1 & 0 & 1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
0 & & & & & & &
\end{array}$$

Для построения полинома нужны только конъюнкции из строк с единицами на левой стороне треугольника.

$$\begin{array}{cc|cc}
 X_2X_3 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 X_1 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 X_1X_3 & \mathbf{1} & 0 & 1 & & \\
 X_1X_2 & \mathbf{1} & 1 & & & \\
 \hline
 X_1X_2X_3 & & & & \mathbf{0} &
 \end{array}$$

Если переменных в функции не 3, а 4 или больше, то метод работает без изменений, только увеличатся размеры таблиц. Тем не менее, в отличие от метода неопределенных коэффициентов, расчеты можно без особых усилий выполнить на листе бумаги.

	x	y	z	f
a_0	0	0	0	1
a_1	0	0	1	1
a_2	0	1	0	0
a_3	0	1	1	1
a_4	1	0	0	0
a_5	1	0	1	0
a_6	1	1	0	1
a_7	1	1	1	0