Здравствуйте .

Тема. Кванторные операции

Пусть имеется предикат $P(x)$, определенный на множестве M и $a \in M$. Подставим a вместо x в предикат $P(x)$, получим высказывание $P(a)$, которое называется *единичным*. Наряду с образованием из предикатов единичных высказываний рассмотрим еще две операции, которые преобразуют одноместный предикат в высказывание.

1. Квантор всеобщности.

Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве M . Под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание, истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента $x \in M$ и ложное в противном случае. Это высказывание не зависит от x . Соответствующее ему словесное выражение «Для всякого x $P(x)$ истинно». Символ $\forall$ называется квантором всеобщности. Переменную x в предикате $P(x)$ называют свободной (ей можно придавать различные значения из M), в высказывании $\forall x P(x)$ переменную x называют связанной квантором всеобщности.

2. Квантор существования.

Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве M . Под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если существует элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно и ложным в противном случае. Это высказывание не зависит от x . Соответствующее ему словесное выражение «существует x , при котором $P(x)$ истинно». Символ $\exists$ называется квантором существования.

Пример.

$M=N$, $P(x)$ – «число x кратно 5»;

$\forall x \in N P(x)$ – «Все натуральные числа кратны 5» ложно, т.е. $(\forall x \in N P(x)) = 0$;

$\exists x \in N P(x)$ – «Существует натуральное число, кратное 5» истинно, то есть $(\exists x \in N P(x)) = 1$.

Замечание 1. Высказывание $\forall x P(x)$ истинно только в том единственном случае, когда $P(x)$ тождественно истинный предикат, а высказывание $\exists x P(x)$ ложно только в том единственном случае, когда $P(x)$ тождественно ложный предикат.

Замечание 2. Кванторные операции применяются и к *многоместным* предикатам. Пусть, например, на множестве M задан *двухместный* предикат $P(x,y)$. Применение кванторной операции к предикату $P(x,y)$ по переменной x ставит в соответствие двухместному предикату $P(x,y)$ *одноместный* предикат $\forall x P(x,y)$ (или *одноместный* предикат $\exists x P(x,y)$) [для любого x $P(x,y)$ истинно (существует x , при котором $P(x,y)$ истинно)], зависящий от переменной y и не зависящий от переменной x . К ним можно применить кванторные операции по переменной y , которые приведут к высказываниям следующих видов: $\forall y \forall x P(x,y)$, $\exists y \forall x P(x,y)$, $\forall y \exists x P(x,y)$, $\exists y \exists x P(x,y)$, $\forall x \forall y P(x,y)$, $\forall x \exists y P(x,y)$, $\exists x \forall y P(x,y)$, $\exists x \exists y P(x,y)$.

Пример.

Рассмотрим предикат $P(x,y)$ – « y является делителем x », определенный на множестве N . Применение кванторных операций к этому предикату приводит к 8 возможным высказываниям:

- 1) $\forall y \forall x P(x,y)$ – «Для всякого y и для всякого x , y является делителем x »;
- 2) $\exists y \forall x P(x,y)$ – «Существует y , которое является делителем всякого x »;
- 3) $\forall y \exists x P(x,y)$ – «Для всякого y существует x такое, что x делится на y »;
- 4) $\exists y \exists x P(x,y)$ – «Существует y и существует x такие, что y является делителем x »;
- 5) $\forall x \forall y P(x,y)$ – «Для всякого x и для всякого y , y является делителем x »;
- 6) $\forall x \exists y P(x,y)$ – «Для всякого x существует y такое, что x делится на y »;
- 7) $\exists x \forall y P(x,y)$ – «Существует x такое, что для всякого y , x делится на y »;
- 8) $\exists x \exists y P(x,y)$ – «Существует x и существует y такие, что y является делителем x ».

Высказывания 1), 5), 7) ложны; а высказывания 2), 3), 4), 6), 8) истинны.