Здравствуйте.

Тема Вычисление двойного интеграла

Вспоминаем общую запись двойного интеграла:

$\iint\limits_D f(x;\, y)dxdy$ Начинаем набивать наш двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;\, y)dxdy$ разнообразной начинкой:

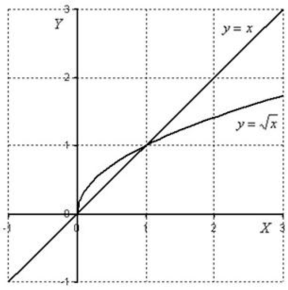
Пример 1

Вычислить двойной интеграл

$\iint\limits_D xdxdy$, $D: y=\sqrt{x};\ \ y=x$

Изменить порядок интегрирования и вычислить двойной интеграл вторым способом.

**Решение**: Изобразим область интегрирования $D$ на чертеже:




Напоминаю, что выполнение чертежа – **необходимый начальный этап** решения. Чертёж крайне важно выполнить правильно и точно, поскольку ошибка в графике незамедлительно запорет всё задание.

Выберем следующий порядок обхода:

$x \le y \le \sqrt{x}$

$0 \le x \le 1$

Вопросы порядка обхода области интегрирования, я комментировать практически не буду, пожалуйста, смотрите статью [Двойные интегралы для чайников](#).

Таким образом:

$$\iint\limits_D xdxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{x}} xdy = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_x^{\sqrt{x}} dy$$

Обратите внимание на следующее действие: в данном случае можно вынести «икс» из внутреннего интеграла во внешний интеграл. Почему? Во внутреннем интеграле $\int\limits_x^{\sqrt{x}} xdy$ **интегрирование проводится по «игрек», следовательно, «икс» считается константой**. А любую константу можно вынести за знак интеграла, что благополучно и сделано.

С интегралами настоятельно рекомендую разбираться по пунктам:

1) Используя формулу Ньютона-Лейбница, найдём внутренний интеграл:
$$\int\limits_x^{\sqrt{x}} dy = (y)\Big|_x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - x$$

**Вместо** «игрека» подставляем функции!

2) Результат, полученный в первом пункте, подставим во внешний интеграл $\int\limits_0^1 x dx$, при этом ни в коем случае не забываем про «икс», который там уже находится:

$$\int\limits_0^1 x(\sqrt{x} - x)dx = \int\limits_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^2)dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} - (0 - 0) = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$

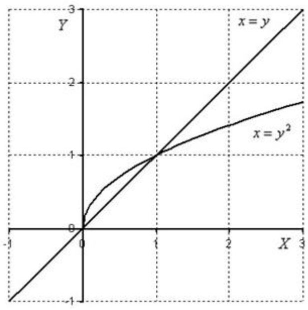
Готово.

Замечательно, если у вас под рукой есть микрокалькулятор, на котором можно считать обыкновенные дроби, он значительно ускорит заключительные вычисления. В последующих примерах я не буду подробно расписывать приведение дробей к общему знаменателю, а просто запишу ответ.

Выполняем вторую часть задания: изменим порядок обхода области и вычислим двойной интеграл вторым способом.

Перейдём к обратным функциям:
$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$
$$y = x \Rightarrow x = y$$

Для наглядности еще раз приведу чертёж, он будет точно таким же, но с другими обозначениями графиков:




Второй способ обхода области:
$$y^2 \le x \le y$$
$$0 \le y \le 1$$

Таким образом:
$$\iint\limits_D x dx dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{y} x dx$$

Вот здесь уже «икс» является «родным» для внутреннего интеграла, поэтому его нельзя вынести во внешний интеграл.

1) Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислим внутренний интеграл:
$$\int_{y^2}^{y} x dx = \frac{1}{2}(x^2)\Big|_{y^2}^{y} = \frac{1}{2}((y)^2 - (y^2)^2) = \frac{1}{2}(y^2 - y^4)$$

**Вместо** «икса» подставляются функции!
**Всегда проявляйте повышенное внимание** при подстановке пределов интегрирования.

2) Результат, полученный в первом пункте, подставим во внешний интеграл и проведём окончательные вычисления:
$$\frac{1}{2}\int_0^1 (y^2 - y^4)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - 0 + 0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{15} - \frac{3}{15}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{15} = \frac{1}{15}$$

Результаты совпали, значит, задание выполнено верно.

**Если есть время, постарайтесь всегда проводить проверку, даже если этого не требуется в условии**: вычислили интеграл одним способом – затем изменили порядок обхода области и вычислили вторым способом.

**Ответ**: $\iint_D x dx dy = \frac{1}{15}$

Пример 2

Вычислить двойной интеграл
$\iint_D 2y dx dy$, $D: y = -x^3;\ \ y = 1;\ \ x = 0$
Выполнить проверку: изменить порядок интегрирования и вычислить двойной интеграл вторым способом.

Это пример для самостоятельного решения. Обратите внимание, что в двойном интеграле изначально присутствует константа. А **константу можно вынести за знак двойного интеграла**, в данном случае:
$$\iint_D 2y dx dy = 2\iint_D y dx dy$$
В ходе решения вынесение константы целесообразно проводить в момент перехода к повторным интегралам.

Как видите, *свойство линейности* справедливо не только для «обычных», но и для кратных интегралов. Интеграл от интеграла недалеко падает.

**Самое главное** потом при вычислениях **вынесенную константу не потерять**. А забывают о ней часто.

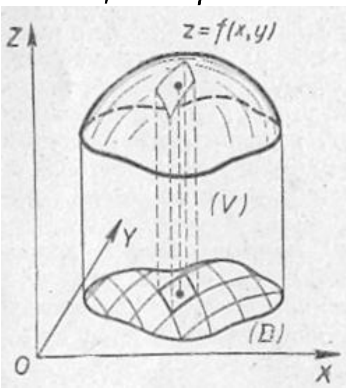
Примерный образец чистового оформления примера в конце урока.

## Двойной интеграл как объем тела

Рассмотрим основной геометрический смысл двойного интеграла $\iint_D f(x;\ y) dx dy$.
Предполагаем, что функция $z = f(x;\ y)$ существует в каждой точке $(x;\ y)$ плоской области $D$ и задаёт некоторую **поверхность трехмерного**

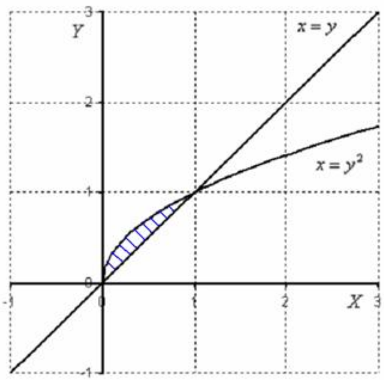
**пространства**. Для определенности считаем, что $f(x;y)>0$, то есть поверхность располагается **над** плоскостью $XOY$.

Согласно **общей концепции интегрирования**, произведение $f(x;y)\cdot dx\cdot dy \quad (\text{"высота"}\times\text{"длина"}\times\text{"ширина"})$ равно *бесконечно малому* объёму $dV$ элементарного кусочка тела (посмотрите на кусок, выделенный на чертеже пунктирными линиями, и мысленно сделайте *бесконечно малыми* его «длину» и «ширину»). Двойной же интеграл **объединяет** эти *бесконечно малые* значения $dV$ по всей области $D$, в результате чего мы получаем суммарный (интегральный) объём всего *цилиндрического бруса* $\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\iint\limits_D dV=V$:




Что это за тело, думаю, понятно – снизу цилиндрический брус ограничен заштрихованной областью $D$, а сверху – фрагментом поверхности $z=f(x;y)$ («шапкой»).

Дополнительно поясню геометрический смысл на Примере №1. В нём мы рассматривали двойной интеграл $\iint\limits_D xdxdy$, причём область интегрирования имела следующий вид:




Из начала координат перпендикулярно экрану монитора мысленно проведите на себя стрелку оси $OZ$. Подынтегральная функция $z=f(x;y)=x$ задаёт **плоскость в пространстве**, которая проходит **над** областью $D$ и ограничивает цилиндрический брус сверху, поэтому значение его объёма получилось положительным: $\iint\limits_D xdxdy=\frac{1}{15}$. Да, такой вот малюсенький брусок, 1/15-я единичного «кубика».

Двойной интеграл может быть и отрицательным, в таких случаях график функции $z = f(x; y)$ полностью (или бОльшей частью) лежит **под** областью $D$. И если в задаче требуется найти **именно объём тела** с помощью двойного интеграла *(в **тройном** этот вопрос отпадает)*, то к «кускам», лежащим ниже плоскости $XOY$, следует добавить знак «минус» *(по аналогии с **площадью криволинейной трапеции, лежащей ниже оси абсцисс**)*.

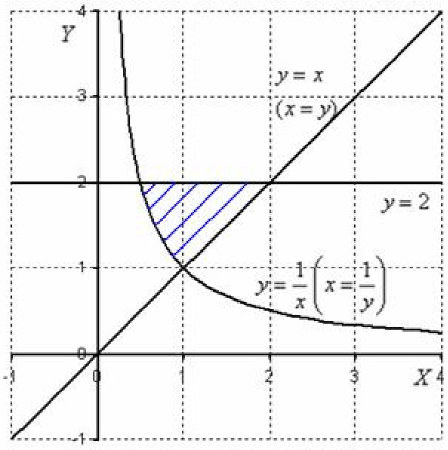
Однако на практике почти всегда встречаются задачи на формальный расчёт двойных интегралов, поэтому мы продолжим совершенствовать технику вычислений:

Пример 3

Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy, \quad D: y = x;\ \ xy = 1,\ \ y = 2$$

**Решение**: Изобразим область интегрирования на чертеже:




После того, как **корректно** выполнен чертеж и **правильно** найдена область интегрирования, самое время разобраться с порядком обхода.

Согласно первому способу обхода, область придется разделить на две части, при этом необходимо будет вычислить следующие интегралы:

$$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{2} \frac{y^2}{x^2}dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2} \frac{y^2}{x^2}dy$$

Энтузиазма, прямо скажем, мало. Проанализируем, а не проще ли использовать второй способ обхода области? Перейдем к обратным функциям, переход здесь элементарен:

$$y = x \Rightarrow x = y$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

Порядок обхода области:

$$\frac{1}{y} \le x \le y$$

$$1 \le y \le 2$$

Таким образом:

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy = \int_1^2 dy \int_{1/y}^{y} \frac{y^2}{x^2}dx = \int_1^2 y^2 dy \int_{1/y}^{y} \frac{dx}{x^2}$$

Ну вот, совсем другое дело. И снова заметьте, что во внутреннем интеграле интегрирование осуществляется по «икс», поэтому константу $y^2$ можно сразу вынести во внешний интеграл

1) Найдём внутренний интеграл:

$$\int_{1/y}^{y} \frac{dx}{x^2} = -\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{1/y}^{y} = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\frac{1}{y}}\right) = -\left(\frac{1}{y} - y\right) = y - \frac{1}{y}$$

Всё-таки подстановка пределов интегрирования, порой, выглядит своеобразно. Сначала **вместо** «икса» мы подставили верхний предел интегрирования $y$, затем **вместо** «икса» подставили нижний предел интегрирования $\frac{1}{y}$. Будьте внимательны при подстановках!

2) Результат предыдущего пункта подставим во внешний интеграл, при этом не забываем про $y^2$, который там уже находится:

$$\int_1^2 \left(y - \frac{1}{y}\right) y^2 dy = \int_1^2 (y^3 - y)dy = \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 4 - 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

**Ответ**: $\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy = 2\frac{1}{4}$

Для тренировки можете попробовать вычислить двойной интеграл менее рациональным способом: $\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^2} \int_{\frac{1}{x}}^{2} y^2 dy + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} \int_x^2 y^2 dy$. Результаты должны совпасть.

Пример 4

Вычислить двойной интеграл

$\iint_D x^2 y dxdy$, $D: y = 2 - x;\ y = x;\ x = 0$

Это пример для самостоятельного решения. Постройте область $D$ и проанализируйте, какой способ обхода области выгоднее использовать. Полное решение и ответ в конце урока.

Усложняем задачу, теперь подынтегральная функция будет представлять собой сумму. Рассмотрим еще два примера, где я остановлюсь на приёме вычисления интеграла, который типичен и эффективен для кратных интегралов:

Пример 5

Вычислить двойной интеграл

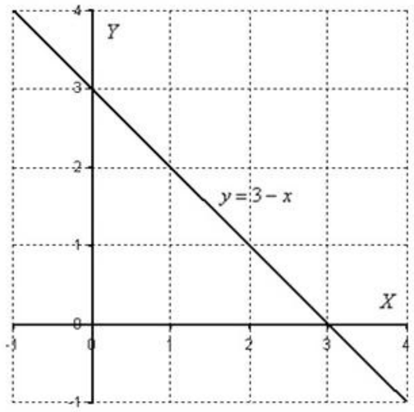
$\iint\limits_D (2x+y)dxdy$, $D: x+y=3;\ y=0;\ x=0$

**Решение**: Сначала рассмотрим то, чего делать не нужно – в данном случае не следует использовать *свойства линейности* кратного интеграла и представлять его в виде:

$$\iint\limits_D (2x+y)dxdy = 2\iint\limits_D xdxdy + \iint\limits_D ydxdy$$

Почему? Вычислений заметно прибавится!

Решение, как обычно, начинаем с построения области интегрирования:




Область $D$ незамысловата, даже штриховать не буду. В данном примере, как легко заметить, не имеет особого значения порядок интегрирования, поэтому выберем первый, более привычный вариант обхода области:

$0 \le y \le 3-x$

$0 \le x \le 3$

Таким образом:

$$\iint\limits_D (2x+y)dxdy = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (2x+y)dy$$

Здесь, в отличие от двух предыдущих примеров, из внутреннего интеграла ничего вынести нельзя, поскольку начинкой является сумма.

$$\int_0^{3-x} (2x+y)dy = \left(2xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{3-x} = 2x(3-x) + \frac{(3-x)^2}{2} - 0 - 0 = 6x - 2x^2 + \frac{(3-x)^2}{2}$$

**Если интегрирование проводится по «игрек», то переменная «икс» считается константой. И наоборот**.

Тем не менее, вот нашли вы первообразную $2xy + \frac{y^2}{2}$ и возникли сомнения, а правильно ли она найдена? Всегда можно выполнить проверку, в данном случае следует найти **частную производную** по «игрек»:

$$\left(2xy + \frac{y^2}{2}\right)'_y = 2x\cdot(y)'_y + \frac{1}{2}\cdot(y^2)'_y = 2x\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2y = 2x + y$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, всё в порядке.

Момент второй, подстановка пределов интегрирования. По стандартной формуле Ньютона-Лейбница сначала **вместо** «игреков» мы подставили $3-x$, а затем – нижний предел интегрирования (нули). **После подстановки должны остаться только «иксы».**

И, наконец, может показаться странным результат: $6x-2x^2+\frac{(3-x)^2}{2}$
Ведь можно раскрыть скобки и привести подобные слагаемые! В данном случае это сделать несложно, и чайникам, вероятно, лучше так и поступить. Но если будет не вторая, а 3-я или 4-я степень? На самом деле **линейную функцию в степени выгоднее проинтегрировать, не раскрывая скобок!** Данный прием я уже применял и подробно комментировал во втором параграфе урока **Как вычислить объем тела вращения?**
Ещё раз посмотрим, как он работает:

2) Берём оставшийся внешний интеграл:

$$\int_0^3\left(6x-2x^2+\frac{(3-x)^2}{2}\right)dx=\int_0^3(6x-2x^2)dx+\frac{1}{2}\int_0^3(3-x)^2dx=$$

$$=\left(3x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3(3-x)^2d(3-x)=27-18-0+0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(3-x)^3\Big|_0^3=$$

$$=9-\frac{1}{6}(0-27)=9+\frac{9}{2}=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$$

При нахождении интеграла $\int_0^3(3-x)^2dx$ использован **метод подведения функции под знак дифференциала**. Где-нибудь возникли сомнения в правильности интегрирования? Возьмите производную по «икс» и выполните проверку!

**Ответ**: $\iint_D(2x+y)dxdy=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$

Пример 6

Вычислить двойной интеграл
$\iint_D(2y^3-x)dxdy$, $D: y=x+2;\ y=0;\ x=0$

Это пример для самостоятельного решения. В образце решения, как и в разобранном примере, использован первый способ обхода области.

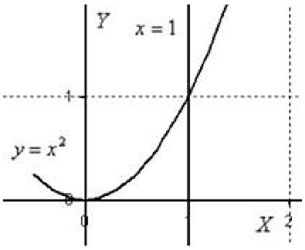
На практике немало примеров, где трудно (а то и невозможно) обойтись без микрокалькулятора-«дробовика». Рассмотрим практический пример на данную тему:

Пример 7

Вычислить двойной интеграл по области $D: x=1;\ y=x^2;\ y=0$
$\iint_D(xy-4x+2y-1)dxdy$

Задача будет решена двумя способами, так как готовое решение у меня уже есть =) А если серьезно, второй способ будет нужен для дополнительных важных комментариев.

**Решение**: Изобразим область интегрирования на чертеже:




Область интегрирования тут простая, и основной гемор ожидается как раз в вычислениях.

Выберем следующий порядок обхода области:

$0 \le y \le x^2$

$0 \le x \le 1$

Таким образом:

$$\iint_D (xy - 4x + 2y - 1)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (xy - 4x + 2y - 1)dy$$

1) $$\int_0^{x^2} (xy - 4x + 2y - 1)dy = \left(\frac{xy^2}{2} - 4xy + y^2 - y\right)\Big|_0^{x^2} = \frac{x^5}{2} - 4x^3 + x^4 - x^2 - 0$$

Начинающим чайникам всегда рекомендую выполнять проверку, особенно в подобных примерах: возьмите **частную производную** по «игрек» от первообразной $\frac{xy^2}{2} - 4xy + y^2 - y$ и получите подынтегральную функцию $xy - 4x + 2y - 1$.

Будьте **предельно внимательны** в подстановке пределов интегрирования: сначала **вместо** «игреков» подставляем $x^2$, затем – ноль. В оформлении вполне допустимо записать один, а не несколько нолей, как это сделано в данном примере. **После подстановки должны остаться только «иксы»**.

2) Второй шаг прост:

$$\int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} - 4x^3 + x^4 - x^2\right)dx = \left(\frac{x^6}{12} - x^4 + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12} - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{21}{20}$$

Перейдём к обратной функции $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ и изменим порядок обхода области:

$\sqrt{y} \le x \le 1$

$0 \le y \le 1$

Таким образом:

$$\iint_D (xy - 4x + 2y - 1)dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 (xy - 4x + 2y - 1)dx$$

1) Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_{\sqrt{y}}^{1}(xy-4x+2y-1)dx=\left(\frac{x^2y}{2}-2x^2+2xy-x\right)\Bigg|_{\sqrt{y}}^{1}=\frac{y}{2}-2+2y-1-\left(\frac{y^2}{2}-2y+2\sqrt{y}y-\sqrt{y}\right)=$$

$$=\frac{5y}{2}-3-\frac{y^2}{2}+2y-2y^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=\frac{9y}{2}-3-\frac{y^2}{2}-2y^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$$

**Когда мы интегрируем по «икс», то переменная «игрек» считается константой**. Не лишней будет и промежуточная проверка, возьмём частную производную по «икс» от найденной первообразной:

$$\left(\frac{x^2y}{2}-2x^2+2xy-x\right)'_x=\frac{y}{2}\cdot(x^2)'_x-2\cdot(x^2)'_x+2y\cdot(x)'_x-(x)'_x=$$

$$=\frac{y}{2}\cdot 2x-2\cdot 2x+2y\cdot 1-1=xy-4x+2y-1$$

Получена подынтегральная функция, что и хотелось увидеть.

Подстановка пределов интегрирования здесь сложнее:
сначала **вместо** «иксов» подставляем 1, затем **вместо** «иксов» подставляем $\sqrt{y}$. **После подстановки должны остаться только «игреки»**.

Степени рекомендую оставить в виде $y^{\frac{a}{b}}$, а не преобразовывать их в корни – будет удобнее интегрировать на втором шаге:

2)

$$\int_0^1\left(\frac{9y}{2}-3-\frac{y^2}{2}-2y^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)dy=\left(\frac{9y^2}{4}-3y-\frac{y^3}{6}-2\cdot\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{9}{4}-3-\frac{1}{6}-\frac{4}{5}+\frac{2}{3}-0=-\frac{21}{20}$$

Результаты совпали, как оно и должно быть.

Легко заметить, что первый способ решения был заметно проще.

**Всегда перед решением анализируйте – какой путь легче и короче**.

Дроби в рассмотренном примере еще худо-бедно можно привести к общему знаменателю вручную. Но не удивляйтесь, если на практике получится ответ вроде $\frac{131}{945}$, по крайней мере, в своей коллекции я нашел немало диких примеров, где без микрокалькулятора-«дробовика» фактически не обойтись.

**Ответ**: $\iint_D (xy-4x+2y-1)dxdy=-\frac{21}{20}$

Ответ получился отрицательным. Геометрически это обозначает, что график подынтегральной функции $f(x;y)=xy-4x+2y-1$ (поверхность в пространстве) полностью или бОльшей частью (не проверял) располагается ниже области интегрирования $D$ под плоскостью $XOY$.

Пример 8

Вычислить двойной интеграл по области $D: x=1;\ y=\sqrt{x};\ y=-x^2$
$\iint\limits_D (12xy+9x^2y^2)dxdy$

Это пример для самостоятельного решения. Ответ будет целым – чтобы от своего хорошего настроения не запугать вас окончательно =). Похожие двойные интегралы встречаются в известном задачнике Кузнецова, и по этой причине пример тоже уместен. Полное решение и ответ в конце урока.

Студенты-заочники почти всегда сталкиваются с двойными интегралами наподобие тех, которые уже рассмотрены, но никто не застрахован от творческих примеров, где в подынтегральной функции есть какие-нибудь синусы, косинусы, экспоненты и т.п.

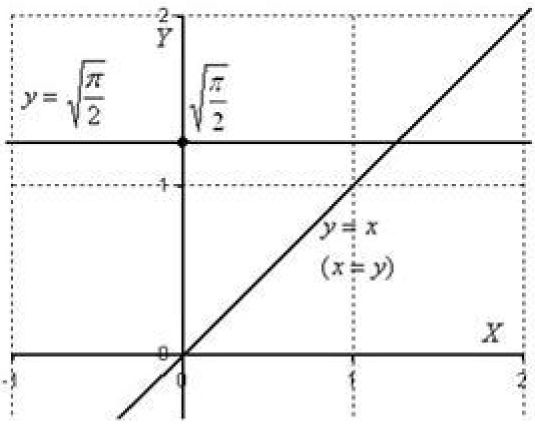
Рассмотрим заключительные примеры на данную тему:

<u>Пример 9</u>

Вычислить двойной интеграл по области $D: x=0;\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}};\ y=x$
$\iint\limits_D 4y^2 \sin xy dxdy$

**Решение**: В ходе выполнения чертежа может возникнуть трудность с построением прямой $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, которая параллельна оси $OX$. Ничего сложного: если $\pi \approx 3{,}14$, то $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1{,}25$ – примерно на этом уровне и следует провести прямую.

Выполним чертёж:




После выполнения чертежа нужно выяснить, какой порядок обхода области выгоднее применить.

Рассмотрим первый способ обхода:

$x \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Тогда: $\iint\limits_D 4y^2 \sin xy dxdy = \int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx \int\limits_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 4y^2 \sin xy dy = 4\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx \int\limits_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin xy dy$

Очевидно, что первый способ является крайне неудачным, поскольку внутренний интеграл $\int\limits_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin xy dy$ придётся дважды брать по частям.

Но есть еще и второй способ обхода области:

$0 \le x \le y$

$0 \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Следовательно: $\iint\limits_D 4y^2 \sin xy dxdy = \int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dy \int\limits_0^y 4y^2 \sin xy dx = 4\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 dy \int\limits_0^y \sin xy dx$

Выглядит гораздо привлекательнее, начинаем вычисления:

1) По формуле Ньютона-Лейбница разберемся с внутренним интегралом:

$$\int\limits_0^y \sin xy dx = -\frac{1}{y}(\cos xy)\Big|_0^y = -\frac{1}{y}(\cos(y \cdot y) - \cos(0 \cdot y)) = -\frac{1}{y}(\cos y^2 - 1) = \frac{1}{y}(1 - \cos y^2)$$

Когда мы интегрируем по «икс», то переменная «игрек» считается константой. Если возникают трудности с интегрированием, можно прибегнуть даже к такому способу: временно замените «игрек» конкретным числом, например, «пятёркой»:

$$\int \sin 5x dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x d(5x) = \frac{1}{5}(-\cos 5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x$$.

Теперь замените «пятёрку» обратно – «игреком»: $-\frac{1}{y}\cos xy$

И, конечно же, лучше сделать проверку, продифференцировав первообразную по «икс»:

$$\left(-\frac{1}{y}\cos xy\right)'_x = -\frac{1}{y} \cdot (\cos xy)'_x = -\frac{1}{y} \cdot (-\sin xy) \cdot (xy)'_x = \frac{1}{y} \cdot \sin xy \cdot y = \sin xy$$

Далее при подстановке пределов интегрирования сначала **вместо** «икса» подставляем $y$, затем – ноль. **После подстановки должны остаться только «игреки»**.

2) Полученный результат $\frac{1}{y}(1-\cos y^2)$ перемещаем во внешний интеграл, **не забывая**, что там уже есть $y^2$ и константа 4:

$$4\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2\cdot\frac{1}{y}(1-\cos y^2)dy = 4\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y(1-\cos y^2)dy = 4\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}(y-y\cos y^2)dy =$$

$$=4\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} ydy - 4\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y\cos y^2 dy = 4\cdot\frac{1}{2}(y^2)\Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} - 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\cos y^2 d(y^2) =$$

$$=2\left(\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 - 0^2\right) - 2(\sin y^2)\Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \pi - 2(1-0) = \pi - 2$$

Второй интеграл взят **методом подведения функции под знак дифференциала**.

**Ответ**: $\iint_D 4y^2\sin xydxdy = \pi - 2$

Таким образом, выбор порядка обхода иногда зависит не только от самой области интегрирования, но и от подынтегральной функции.

Пример 10

Вычислить двойной интеграл по области $D: x=0;\ y=2;\ y=\frac{x}{2}$

$$\iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{8}}dxdy$$

Это пример для самостоятельного решения.