

Понятие определителя 2-го и 3-го порядков

Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из четырех элементов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Определение 1. Определителем или детерминантом второго порядка, соответствующим матрице (1.1), называется число, равное разности произведений элементов стоящих на главной диагонали, и элементов, стоящих на побочной диагонали (определитель обозначается $|A|$ или $\det A$).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пример 1.3. 1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0$, 2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 4 \cdot (-2) = 29$.

Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из девяти

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{элементов:} \quad (1.2)$$

Определение 2. Определителем или детерминантом третьего порядка, соответствующим матрице (1.2), называется число равное

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Структура этого выражения помогает понять наглядное правило Саррюса. Припишем к элементам определителя справа первый и второй столбцы определителя. Три произведения, соответствующие прямым, параллельным главной диагонали, надо взять со знаком плюс, а остальные три произведения, соответствующие прямым, параллельным побочной диагонали, надо взять его со знаком минус.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 8 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 8 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 2 =$$

Пример 1. $= -16 + 3 + 4 - 16 + 1 - 12 = -36$.

Свойства определителей

1⁰. Величина определителя не изменится, если его строки и столбцы поменять местами.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2⁰. Перестановка двух строк или столбцов определителя равносильна умножению его на (-1).

3⁰. Если определитель имеет две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то он равен нулю.

4⁰. Умножение всех элементов строки или столбца определителя на любое число λ равносильно умножению определителя на это число λ .

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5⁰. Если все элементы некоторого столбца или строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

6⁰. Если элементы двух строк или двух столбцов определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

7⁰. Если каждый элемент любого столбца или любой строки определителя представлен в виде двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ аналогично для определителей 2-го порядка.}$$

8⁰. Если к элементам некоторой строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на любой общий множитель λ , то величина определителя не изменится.

Определение 3. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент, т.е. i – ой строки и j – го столбца.

Определение 4. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Для вычисления алгебраических дополнений элементов определителей третьего

порядка знаки легко запомнить по следующей схеме:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Например:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 5 = 21 - 25 = -4;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot (-4) = 4.$$

9⁰. Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Например:
$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{1j}.$$

10⁰. Сумма произведений элементов какого-нибудь столбца или строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца или строки равна нулю.

Например:
$$a_{12}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0 \text{ или } \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{2j} = 0.$$